

2019~2020学年天津南开区南开大学附属中学高一下学期期中数学试卷

一、选择题

爱智 (本大题共10小题, 每小题3分, 共30分)

1. 复数 $\frac{10i}{1-2i} = (\quad)$.

A. $-4+2i$

B. $4-2i$

C. $2-4i$

D. $2+4i$

2. 下列命题中, 正确的是 ().

A. 若 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面, 且 $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 a, b 是异面直线

B. 若 a, b 是两条直线, 且 $a \parallel b$, 则直线 a 平行于经过直线 b 的所有平面

C. 若直线 a 与平面 α 不平行, 则此直线与平面内的所有直线都不平行

D. 若直线 $a \parallel$ 平面 α , 点 $P \in \alpha$, 则平面 α 内经过点 P 且与直线 a 平行的直线有且只有一条

3. 已知复数 $\frac{a+i}{2-i}$ 为纯虚数, 那么实数 $a = (\quad)$.

A. -2

B. $-\frac{1}{2}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

4. 若在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 1$, $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ().

A. 正三角形

B. 锐角三角形

C. 斜三角形

D. 等腰直角三角形

5. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 的取值范围是 ().

A. $[0, \frac{\pi}{2})$

B. $[\frac{\pi}{2}, \pi)$

C. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

D. $(\frac{\pi}{2}, \pi]$

6. 设 z_1, z_2 是复数, 则下列命题中的假命题是 ().

A. 若 $|z_1 - z_2| = 0$, 则 $\overline{z_1} = \overline{z_2}$

B. 若 $z_1 = \overline{z_2}$, 则 $\overline{z_1} = z_2$

C. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$

D. 若 $|z_1| = |z_2|$, 则 $z_1^2 = z_2^2$

7. 长方体的全面积为11, 十二条棱的长度之和为24, 则这个长方体的一条对角线长为 ().

A. 5

B. 6

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{14}$

8. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面, 且 $AB \perp BC$, $AB = BC = AA_1 = 2$, 若该三棱柱的所有顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为 ().

A. 48π

B. 32π

C. 12π

D. 8π

9. 在四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BC} = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$, 其中 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 则四边形 $ABCD$ 为 ().

A. 梯形

B. 平行四边形

C. 菱形

D. 矩形

10. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 () .
- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

二、填空题

(本大题共5小题, 每小题4分, 共20分)

11. 若复数 $z = 1 + 2i$, 其中 i 是虚数单位, 则 $\left(z + \frac{1}{z}\right) \cdot \bar{z} =$ _____ .

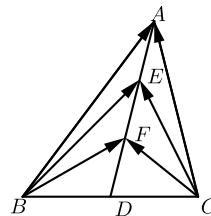
12. 已知平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{3}$. 则 $|\vec{b}| =$ _____ .

13. 在正方体上任意选择4个顶点, 它们可能是如下某些几何体的4个顶点, 这些几何体是 _____ . (写出所有正确结论的编号)

- ①矩形;
②不是矩形的平行四边形;
③有三个面为等腰直角三角形, 一个面为等边三角形的四面体;
④每个面都是等边三角形的四面体;
⑤每个面都是直角三角形的四面体.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}c$, 则 $\frac{b}{c} =$ _____ .

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是 _____ .



三、解答题

(本大题共5小题，共50分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 已知 $b^2 = ac$ 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$.

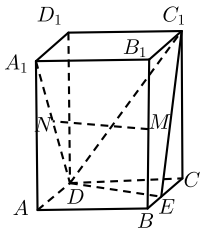
(1) 求 $\angle A$ 的大小.

(2) 设 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{A}{2}) + \sin(\omega x)$ ($\omega > 0$)且 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值.

17. 已知 z 是复数, $z + 2i, \frac{z}{2 - i}$ 均为实数 (i 为虚数单位), 且复数 $(z + ai)^2$ 在复平面上对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

18. 如图, 直平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

求证: $MN \parallel$ 平面 C_1DE .



19. 设 $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(\frac{A}{2}) = 0$, $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

20. 在如图所示的几何体中, D 是 AC 的中点, $EF \parallel DB$. 已知 G, H 分别是 EC 和 FB 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 ABC .

